CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Sistema de numeración griego clásico

Ilustración: A. Ortega

Índice

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN

1.2. OPERACIONES ELEMENTALES

2. DIVISIBILIDAD

2.1. MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO

2.2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

2.3. OBTENCIÓN DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

3.2. LA CRIBA DE ERATÓSTENES

3.3. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

3.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS

3.5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS

3.6. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Fotografía: Clarisa Rodrígues

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje universal y se dice que están expresados en el sistema decimal.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

- En el número 4 652 031 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el 1

  - Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será:

  $$3 \cdot 10 = 30$$

  - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100:

  $$0 \cdot 100 = 0$$

  - En cuarto lugar, las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1 000 la cifra situada en ese lugar:

  $$2 \cdot 1\,000 = 2\,000$$

  - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será:

  $$5 \cdot 10\,000 = 50\,000$$

  - En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 100 000.

  $$6 \cdot 100\,000 = 600\,000$$

  - Y por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 1 000 000:

  $$4 \cdot 1\,000\,000 = 4\,000\,000$$

Con esto observamos que el número 4 652 031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4\,652\,031 = 4 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$$

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 7 653 b) 30 500 c) 275 643 d) 200 543

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508 744 b) 65 339 001 c) 7 092 157 d) 9 745

3. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1 000

Reloj con números romanos

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1 550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1 555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Otros sistemas de numeración

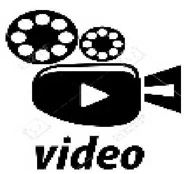
Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5 000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año)

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1

Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

4. ¿Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario?



Números Naturales, Números Primos. ¿Qué ocurriría si un día al despertarnos no hubiera números? ¿Somos numero-dependientes? Los números naturales son los más sencillos que conocemos, sin embargo su utilidad llega a límites insospechados. Los números primos son unos números especiales que pueden ayudarnos a ocultar mensajes secretos, incluso sirven para codificar claves de Internet. Más por menos. La aventura del saber. Antonio Pérez.

[Más por menos: Números Naturales, Números Primos | RTVE Play]

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

1.2. Operaciones elementales

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

Hacer 6 · 5 es lo mismo que hacer 6 + 6 + 6 + 6 + 6

Nota:

Aunque en primaria se usaba el símbolo "x" para denotar el producto, a partir de ahora y, por comodidad, lo simbolizaremos con un punto: ·

Recuerda que:

Las palabras "**multiplicación**" y "**producto**" **no** significan lo mismo aunque de manera habitual se usan indistintamente. "Multiplicación" es la operación y "producto", el resultado.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Nota

Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

2 · 3 = 3 · 2

Si llamamos *a, b* y *c* a tres números naturales, se verifica la siguiente propiedad:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Por ejemplo:

Sustituyendo las letras *a* por 2, *b* por 5 y *c* por 7, tenemos que:

2 · (5 + 7) = (2 · 5) + (2 · 7)

Esta propiedad también se verifica para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, *a, b* y *c* números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

Calcular 15 · 23 mentalmente es complicado, pero si hacemos:

15 · 23 = 15 · (20 + 3) = (15 · 20) + (15 · 3) resulta más sencillo.

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

(15 · 20) + (15 · 3) = 15 · (20 + 3) se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15,* pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) + (c \cdot a) = (b + c) \cdot a$.

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) - (c \cdot a) = (b - c) \cdot a$.

Ejemplos:

a) (870 · 4) – (870 · 3) = 870 · (4 – 3) = 870 · 1 = 870
b) (450 · 2) + (3 · 450) = (2 + 3) · 450 = 5 · 450 = 2 250
c) (45 · 6) – (45 · 5) = 45 · (6 – 5) = 45 · 1 = 45

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

División de números naturales

> ***Nota***:
>
> La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**"
>
> "División" es, pues, la operación, y "cociente" el resultado de esa operación. Los símbolos utilizados para representarlas son:
>
> /, : , y la fracción: —

Ejemplo:

- En el comedor del instituto las mesas son de 6 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se denominan:

33 $\rightarrow$ Dividendo 6 $\rightarrow$ Divisor 5 $\rightarrow$ Cociente 3 $\rightarrow$ Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: $33 = (6 \cdot 5) + 3$

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & C \end{array}$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{D = (d \cdot c) + r}$$

Recuerda que: el resto es siempre estrictamente menor que el divisor.

Ejemplo:

- El cociente entre 3 658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3\,658 = (65 \cdot 56) + 18$$

Ejemplos:

- 25/5, 25 : 5 y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

La expresión:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

Jerarquía de las operaciones

En la expresión: 3 · 4 + 2, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

¿Y en 8 : 2 · 3? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: 8 : 2 · 3 = 4 · 3 = 12, en lugar de 8 : 2 · 3 = 8:6 = 4/3.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones** y **divisiones** y luego, las **sumas y restas.**

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Notas

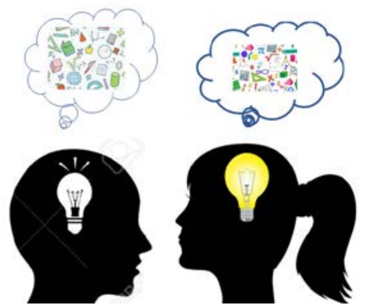
a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: (21 · 2) + 30 resulta innecesario, ya que, por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que, si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

5. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 23 · 4 – 23 · 3 b) 540 · 8 + 540 · 2 c) 55 · 13 – 55 · 3 d) 600 · 33 – 600 · 3



BUSCA UNA BUENA ESTRATEGIA

6. Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.

7. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

a) 6 738 : 456 b) 34 540 : 30 c) 240 035 : 981 d) 397 : 45

8. ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?

9. El equipo de fútbol del instituto decide celebrar su victoria de liga yendo de viaje con su entrenador. Sabiendo que el equipo lo componen 20 alumnos, que el viaje les cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7 350 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90,….

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$

Es decir: $\dot{5} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\}$

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

10. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9

11. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144

12. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 2 es **divisor** de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 6 es **divisor** de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

d) 1 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.

e) 18 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0.

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 8 es **divisible** por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 20 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 36 es **divisible** por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: 5 · 3 = 15, podemos deducir lo siguiente:
  - 5 y 3 son divisores de 15.
  - 15 es múltiplo de 3 y de 5.
  - 15 es divisible por 3 y por 5.

Actividades propuestas

13. A partir de la igualdad: 6 · 4 = 24, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

14. Escribe frases usando las expresiones: “ser múltiplo de”, “ser divisor de” y “ser divisible por” y los números 10, 5 y 35.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que 2 + 3 + 1 = 6 que es múltiplo de 3.
- El número 1 002 es divisible por 3 ya que 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que 6 + 9 = 15, y 15 es divisible por 3, pues 1 + 5 = 6 que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3.
- El número 78 596 778 696 es divisible por 3 ya que 7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78, y 78 es divisible por 3 pues 7 + 8 = 15, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 3 628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 4 875 y 34 590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 7 332 es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 por ser par.
  - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo:

- El número 6 012 es divisible por 9 ya que: 6 + 0 + 1 + 2 = 9.
- El número 3 903 no es divisible por 9 ya que: 3 + 9 + 0 + 3 = 15 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0.

Ejemplo:

- El número 59 870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 80 498 es divisible por 11 ya que: (8 + 4 + 8) – (0 + 9) = 11

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Criterios de divisibilidad. En este vídeo vamos a explicar los criterios de divisibilidad de los números 2, 3, 5, 6, 9 y 10, además vamos a realizar ejercicios y ejemplos para que os quede claro de una forma divertida y entretenida.

video

https://www.youtube.com/watch?v=WfbZrrS7bZA

Actividades propuestas

15. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4 520, 3 411, 46 295, 16 392, 385 500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 2? ¿Y con los que son divisibles por 2?

16. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 3 a la vez.

17. Sustituye A por un valor apropiado para que:

a) 24 A75 sea múltiplo de 3.

b) 11 07A sea múltiplo de 6.

c) 5ª 439 sea múltiplo de 11.

18. ¿Todos los números divisibles por 3 los son por 9? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

19. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
2 567	Divisible por 2	
498 650	Divisible por 5	
98 370 034	Divisible por 3	
78 337 650	Divisible por 6	
984 486 728	Divisible por 4	
23 009 845	Divisible por 11	

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

2.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero N, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4 ..., N. De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5, ..., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.
Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.
Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.
Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 54 : 2 = 27 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.
Es divisible por 3. (5 + 4 = 9, múltiplo de 3) → 54 : 3 = 18 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.
Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 54 : 6 = 9 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.
Es divisible por 9. (5 + 4 = 9, múltiplo de 9) → 54 : 9 = 6.
Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).
Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Actividades propuestas

21. Calcula los múltiplos de 25 comprendidos entre 1 y 200.

22. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 40 es múltiplo de 10.
b) 2 es divisor de 10.
c) 4 es múltiplo de 8.
d) 55 es divisible por 11.
e) 90 es divisor de 9.
f) 3 es divisible por 45.

23. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 256*x* 81*y*.

24. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

25. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) 65 b) 33 c) 60 d) 75 e) 100 f) 150

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que tiene EXACTAMENTE dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores.

Los números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 22, 45, 60, 98, 345 o 39 867 657 son compuestos.

Actividades propuestas

26. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

27. ¿Cuántos números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

3.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

➢ Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la criba como sigue:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	**9**	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	**15**	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
21	~~22~~	**23**	~~24~~	**25**	~~26~~	**27**	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	**33**	~~34~~	**35**	~~36~~	**37**	~~38~~	**39**	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	**45**	~~46~~	**47**	~~48~~	**49**	~~50~~
51	~~52~~	**53**	~~54~~	**55**	~~56~~	**57**	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	**63**	~~64~~	**65**	~~66~~	**67**	~~68~~	**69**	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	**75**	~~76~~	**77**	~~78~~	**79**	~~80~~
81	~~82~~	**83**	~~84~~	**85**	~~86~~	**87**	~~88~~	**89**	~~90~~
91	~~92~~	**93**	~~94~~	**95**	~~96~~	**97**	~~98~~	**99**	~~100~~

➢ Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una tabla así:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	**25**	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	**35**	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	**49**	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	**55**	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	**65**	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	**77**	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	**85**	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	**95**	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

➢ No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto, no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5 (algunos de los cuales ya estaban tachados).

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	**49**	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	**77**	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- Después nos encontramos con el 13 y tachamos los múltiplos de 13.

De forma análoga vamos localizando los siguientes primos y tachando sus múltiplos hasta llegar a una tabla de la forma:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso es porque no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "filtro" por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "primos".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Actividades propuestas

28. ¿Te atreverías a repetir la criba de Eratóstenes, pero hasta el 150?

29. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que, si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números, pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Su descomposición sería $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresaría como $20 = 2^2 \cdot 5$

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$.

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y, por tanto, su descomposición es:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90:

Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: 90 : 2 = 45

Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: 45 : 3 = 15.

Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: 15 : 3 = 5

Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Esto se suele realizar como se señala en la nota de la siguiente forma:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2 520:

2 520	2
1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Por tanto: $2\,520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Actividades propuestas

30. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 40 b) 56 c) 75 d) 90

31. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 110 b) 124 c) 290 d) 366

32. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1 290 b) 3 855 c) 4 520 d) 5 342

33. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1 000, 10 000 y 100 000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

34. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256?

¿Podrías continuar tú la serie con 5 números más?

3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisores de 36 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: M.C.D (24, 36) = 12

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D.

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120

1. Factorizamos cada número:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente: Son 2 y 3

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

M.C.D (72, 90, 120) = 2 · 3 = 6.

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

36. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

- Vamos a calcular m.c.m (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 $\rightarrow$ 10, 20, 30, 40, 50, 60, …

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, … pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

m.c.m (10, 15) = 30

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

- Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números:

$$16 = 2^4$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

En nuestro caso: 2^4, 3 y 5.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m}(16, 24, 40) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Actividades propuestas

37. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

38. Calcula el m.c.m de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de lazo rojo de 15 m y uno azul de 20 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y las quiere cortar en trozos de la misma longitud para tenerlas preparadas para hacer empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima que puede cortar cada rollo para hacer los paquetes?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 20 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

M.C.D. (15, 20) = 5

Por tanto, la longitud de cada trozo de lazo para los paquetes será de 5 m.

Ejemplo:

- El abuelo de Ana toma unas pastillas para el corazón cada 8 horas y otras para la circulación cada 12 horas. Acaba de tomar los dos medicamentos a la vez. ¿Dentro de cuantas horas volverá a tomárselos a la vez?

Estamos buscando un número de horas que será mayor o igual a 12, y múltiplo de 8 y de 12 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

m.c.m. (8, 12) = 24

Por tanto, dentro de 24 horas se tomará ambos medicamentos a la vez.

Actividades propuestas

39. María y Paula tienen 25 cuentas blancas, 15 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

40. Un autobús pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobús cada 36 minutos. Si a las 9 de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez. ¿A qué hora vuelven a coincidir?

41. Se compran en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos centros de mesa se pueden elaborar si se coloca la máxima cantidad de flores sin que sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles se colocan en cada centro de mesa?

42. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 60 minutos, otro que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

43. ¿Cuál será la menor cantidad de caramelos que se puede repartir en partes iguales entre grupos de 20, 30, o 60 niños? Determina en cada caso cuántos caramelos le toca a cada niño.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿A qué pensabas que los números eran solo eso, pues números?

Pues no, hay **números perfectos, números amigos, ¡¡ hasta números gemelos!!**

Números perfectos

Son **números perfectos** los que son iguales a la suma de sus divisores, excepto él mismo.

El más pequeño es el 6: $6 = 1 + 2 + 3$

El siguiente es el 28: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Después del 28, no aparece ningún número perfecto hasta el 496, el cuarto número perfecto es el 8 128, el quinto perfecto es 33 550 336. Se observa que cada número perfecto es mucho mayor que el anterior. ¡¡Qué curioso!!

¿Habrá alguna fórmula para obtener números perfectos?

Pues sí, la descubrió Euclides y es la siguiente:

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$$

Siendo *n* un número natural y siempre que $(2^n - 1)$ sea primo

Números amigos

Dos **números amigos** son dos enteros positivos tales que la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro. (Se consideran divisores propios de un número a todos sus divisores excepto él mismo)

Un ejemplo es el par (220, 284), ya que:

Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284

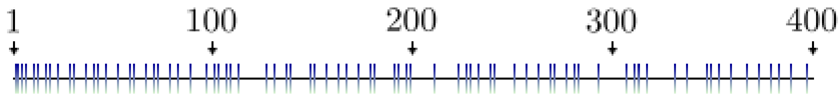
Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220

Para los pitagóricos los números amigos eran muy especiales, pues les atribuían propiedades casi mágicas.

Números gemelos

Se llaman números **primos gemelos** a los pares de números primos que son impares consecutivos (3 y 5, 11 y 13, …). ¿Puedes encontrar tú alguno más?
Se supone que el número de primos gemelos es infinito, pero está sin demostrar.
Lo que sí se puede demostrar es que existen dos números primos consecutivos cuya diferencia sea tan grande como queramos.

Euclides demostró que hay **infinitos** números primos. Si *p1, p2, …, pn* son los primeros n números primos, entonces *p1 * p2 * …* pn* + 1, es también un número primo.
Actualmente tienen grandes aplicaciones en **criptografía**. Esto se debe a su extraña distribución:



Números primos en la música y literatura

- El compositor francés Olivier Messiaen, inspirándose en la naturaleza, utilizó los números primos para crear música no métrica empleando sonidos con duración un número primo para crear ritmos impredecibles.
- *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, describe en primera persona la vida de un joven autista, utiliza únicamente los números primos para numerar los capítulos.
- *La soledad de los números primos*, novela escrita por Paolo Giordano, ganó el premio Strega en 2008.
- *La música de los números primos,* escrito por Marcus du Sautoy, donde cuenta muchas curiosidades sobre los números primos

LOS PRIMOS GERMAIN

Sophie Germain (1776-1831)

Sophie Germain fue una matemática autodidacta. Nació en París en las últimas décadas del Siglo de las Luces. Sus primeros trabajos en Teoría de Números, entre 1804 y 1809, los conocemos a través de su correspondencia con C. F. Gauss, en la que mantenía oculta su identidad bajo el pseudónimo de Monsieur Le Blanc.

En noviembre de 1804 está fechada la primera carta, Gauss, en su respuesta, admira la elegancia de una de sus demostraciones. En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento en Teoría de Números. Demostraba que si x, y, z son números enteros, tales que $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ entonces, al menos uno de los números x, y o z debe ser divisible por 5. *Reanudó la correspondencia, ya con su nombre en 1819. Posteriormente, hacia 1819, Sophie retomó sus trabajos en Teoría de Números. De esta época es otro de los resultados de Sophie. Utilizando adecuadamente su teorema conseguía demostrar que para todo número primo n menor que 100 (y por lo tanto para todo número menor que 100) no existe solución a la ecuación de Fermat, cuando los números x, y, z no son divisibles por n.*

Los Primos Germain y el teorema que lleva su nombre fue el resultado más importante, desde 1738 hasta 1840, para demostrar el último teorema de Fermat, además permitió demostrar la conjetura para n igual a 5. La demostración se dividió en dos casos: el primero consistía en probarlo cuando ninguno de los números x, y, z es divisible por n, y el segundo cuando uno sólo de los tres números es divisible por n. Además, con esta clasificación el primer caso del Teorema de Fermat para n = 5 quedaba probado. En 1825 Legendre y Dirichlet completaron la demostración para n = 5 en el segundo caso.

El teorema de Sophie Germain demuestra que si n es un número primo tal que 2n + 1 es primo, entonces el primer caso del teorema de Fermat es verdadero. El trabajo se había simplificado a la mitad. El teorema de Germain será el resultado más importante relacionado con la conjetura de Fermat desde 1738 hasta la obra de Kummer en 1840.

Durante los sucesos revolucionarios que tuvieron lugar en París en julio de 1830, Sophie vuelve a refugiarse en el estudio. Redactó dos trabajos, uno sobre teoría de números y otro sobre elasticidad en el que buscaba definir una teoría dinámica de la curvatura: "Memoire sur la courbure de surfaces". Estas dos memorias fueron publicadas en 1831, después de su muerte, en el Crelle's Journal. Una vez más su camino se cruzó con el de Gauss que acababa de publicar una teoría matemática de la curvatura en la que definía lo que hoy se conoce por curvatura gaussiana como el producto de las curvaturas principales.

Primos de Germain

En Teoría de Números se dice que un número natural es un **número primo de Germain**, si el número n es primo y $2n + 1$ también lo es. Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200, son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191.

Conjetura de Fermat

Hace más de 350 años el matemático francés Pierre Fermat, en el siglo XVII, en 1637, escribió en el margen de un libro, en la *Arithmética* de *Diofanto*, un pequeño problema, dijo que lo había demostrado, pero no anotó la demostración porque no le cabía en dicho margen.

El último teorema de Fermat es una afirmación sobre los números naturales que dice que: Si *n* es u

n número natural mayor o igual a 3, la ecuación *x* elevado a *n* más *y* elevado a *n* es igual a *z* elevado a *n*, $x^n + y^n = z^n$, no tiene ninguna solución cuando *x, y* y *z* no son 0.

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla."

Observa que para *n = 2,* es el *Teorema de Pitágoras,* que sabemos que tiene solución, las ternas pitagóricas.

Muchos matemáticos intentaron demostrarlo sin éxito. Parece algo sencillos y sin embargo se ha necesitado utilizar matemáticas que entonces no se conocían para demostrarlo. *Andrew Wiles* utilizó en 1995 que las curvas elípticas semiestables son racionales o son modulares.

Fermat

Criptografía y números primos

La Teoría de Números se aplica generalmente a la criptografía. Hoy en día, el sistema criptográfico más común se llama RSA. Se utiliza mucho para mantener la seguridad en internet y en las finanzas.

Se usan números muy grandes que sean producto de dos números primos, también muy grandes.
Tú sabes encontrar los factores primos de un número, pero si es muy grande, ni siquiera lo saben hacer los ordenadores. Ahora se está queriendo utilizar la computación cuántica.

Conjeturas matemáticas

Una **conjetura matemática** es una afirmación que no ha podido ser demostrada ni refutada. Si se logra demostrar, como la de *Fermat*, deja de ser una conjetura y pasa a ser un teorema. Así ha ocurrido con:

Teorema de los cuatro colores, probado en 1976, dice que todo mapa se puede colorear con sólo cuatro colores sin que dos zonas adyacentes tengan el mismo color. Fue demostrado con ayuda del ordenador.

Conjetura de *Poincaré* que trata sobre la esfera en cuatro dimensiones. *G. Perelman* lo demostró en 2004.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas.	La operación 2·3+7 tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	- *a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. - *a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	• 3 742 es divisible por 2. • 4 980 es divisible por 2 y por 5. • 2 957 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores, es decir, que no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m. (18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D. (18, 12) = 6

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 84 300 b) 3 333 c) 119 345 d) 903 711

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 4 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508 744 b) 653 349 001 c) 47 092 157 d) 9 745

3. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 28 · 4 – 28 · 3 b) 30 · 4 + 30 · 2 c) 66 · 23 – 66 · 13 d) 700 · 44 – 700 · 4

4. Construye dos números con las cifras 6, 7 y 8 tal que su producto sea lo más grande posible.

5. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad: D = d · c + r

a) 3 844 : 45 b) 74 840 : 30 c) 983 035 : 981 d) 847 : 45

6.Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 654 : 77 b) 543 : 7 c) 8 374 : 85 d) 9 485 : 11 e) 6 590 : 41

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) (55 + 12) · 4 b) 66 · 2 + 10 c) 55 + 70 · 3 + 11 d) 330 – 10 · 2 + 82

8. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 2 · (46 – 16) b) 2 · 46 – 16 c) 2 · 46 – 2 · 16 d) 2 · (46 + 16) e) 2 · 46 + 16

9. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4 · (44 + 5) – 6 · 2 + 9 b) 2·(3 + 11) – (4 + 12) c) (18 – 4)·5 + 3 · 7 – 13 d) 5·12+(3 – 2)·4 - 3 + 4·5 - 5

11. Invente un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: 5 + 4(6 - 2)

12. Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 376 : 37 b) 299 : 7 c) 3 524 : 65 d) 585 : 22 e) 2 060 : 51

13. Realiza las siguientes operaciones:

a) (34 + 23) · 5 b) 87 · 2 + 10 c) 55 + 65 · 3 + 11 d) 230 – 100 · 2 + 90

14. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 12) b) 8 · 22 – 12 c) 8 · 22 – 8 · 12 d) 8 · (22 + 12) e) 8 · 22 + 12

15. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4·(65 + 7) – 5 · 2 + 4 b) 2·(3 + 9) - (4 + 8) c) (22 - 4)·5 + 3 · 2 - 1 d) 5 · 4 + (4 - 2) · 5 – 3 + 4 · 6 - 5

17. Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: (34 + 7) · 8

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

18. Sabemos que para el viaje de fin de curso son necesarios 3 autobuses, ya que viajarán 103 alumnos. En los dos primeros autobuses viajan el mismo número de estudiantes y en el tercero un alumno más que en los otros dos. ¿Cuántas personas viajan en cada autobús?

19. ¡MAGIA!

Sigue los siguientes pasos:

- Piensa en dos números naturales de una cifra.
- Multiplica el primero por 2 y súmale 8.
- Multiplica el resultado anterior por 5.
- Suma el segundo número que habías pensado al resultado anterior.
- Resta 40 al último resultado

¿Qué ocurre? ¿Es casualidad? ¿Pasará siempre lo mismo? ¿Puedes explicarlo?

Divisibilidad

20. Escribe los diez primeros múltiplos de 6 y los diez primeros múltiplos de 9. ¿Cuáles son comunes a ambos?

21. Escribe cuatro números que cumplan que la cifra de las unidades sea el triple que la de las decenas de manera que dos de ellos sean divisibles por 2 y los otros dos no lo sean.

22. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 15:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

23. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 5. ¿Y de 10? ¿Cuáles coinciden? ¿Por qué?

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4 520, 3 411, 46 295, 16 392, 385 500

24. Escribe cuatro números de cuatro cifras que cumplan que la cifra de las decenas sea el doble que la de las unidades de manera que, uno de ellos sea divisible por 3, otro por 11, otro por 2 y otro por 4.

25. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
327	Divisible por 11	
494 530	Divisible por 4	
39 470 034	Divisible por 6	
7 855 650	Divisible por 3	
985 555 328	Divisible por 2	
20 000 045	Divisible por 10	

26. Haz una lista con los valores de las monedas y billetes del sistema monetario euro.

¿Figura entre ellos algún número primo? ¿Por qué crees que es así?

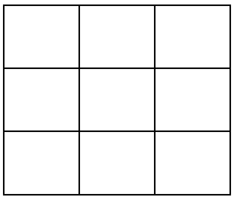
Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

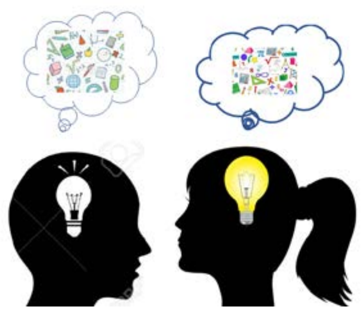
27. Pedro tiene una forma muy peculiar de dar el teléfono a sus amigos: les dice que consta de nueve cifras, que no se repite ninguna y que leyéndolo de izquierda a derecha se cumple:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5 pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un número múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un número múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías averiguar cuál es su teléfono?

28. Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:





EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

29. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 2 y por 11 a la vez:

$$2\,56x\,81y$$

30. Sabemos que el número 1 452 es múltiplo de 11. Calcula otro múltiplo de 11 solo cambiando de lugar las cifras de este número.

31. Completa en tu cuaderno con las expresiones “ser múltiplo de”, “ser divisor de “ o “ser divisible por”:

a) 40 es …………. 10. b) 2 es ……….. 10.

c) 4 es ……….. 8. d) 935 es …………. 11.

e) 90 es …………. 45. f) 3 es ……………..15.

Números primos

32. Descompón en factores primos los siguientes números: 1 530, 2 457 y 7 440.

33. Observa la descomposición factorial de los siguientes números *a, b, c, d* y contesta:

$$a = 2 \cdot 3^2 \qquad b = 2 \cdot 3 \qquad c = 5 \cdot 7 \qquad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

a) ¿Cuál de ellos es múltiplo de *a*?
b) ¿Cuáles son divisores de *d*?
c) ¿Cuáles son primos entre sí?

34. Averigua cuales son los números cuyas descomposiciones factoriales son:

a) $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ b) $y = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 11$ c) $z = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 9 y 12 b) 18 y 42 c) 8 y 15 d) 108 y 630

36. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 140 y 300 b) 693 y 1 485 c) 365 y 600 d) 315 y 1 845

37. Calcula el m.c.m y M.C.D. de los siguientes números:

a) 24, 60 y 80 b) 60, 84 y 132 c) 270, 315 y 360 d) 240, 270 y 36

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 + 15 · 3?

a) 105 b) 65 c) 303 d) 900

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) En una división exacta el cociente siempre es cero.

b) En el sistema de numeración decimal el valor de una cifra es independiente del lugar que ocupa.

c) Si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número distinto de cero, el cociente no varía.

d) El producto y la división de números naturales cumplen la propiedad conmutativa.

3. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 40?

a) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40} c) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 20, 40}

b) D(40) = {1, 2, 4, 6, 5, 8, 10, 20, 40} d) D(40) = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

4. El número de divisores de 12 es:

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5

5. El número 315A es múltiplo de 9 para los siguientes valores de A:

a) A = 9 y A = 3 b) A = 9 y A = 1 c) A = 3 y A = 6 d) A = 9 y A = 0

6. ¿Cuál de estos números cumple que es un número de tres cifras par, divisible por 5 y por 17 y la suma de sus cifras es 7?

a) 170 b) 510 c) 610 d) 340

7. Sabiendo que *a* es divisible por *b*. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) El número *a* es divisor de *b*.

b) El número *a* es múltiplo de *b*.

c) El número *b* es un múltiplo de *a*.

d) Los números *a* y *b* son primos entre sí.

8. El M.C.D.(54, 360, 45) es:

a) 18 b) 27 c) 45 d) 9

9. María compra en el supermercado los zumos en paquetes de 2 y los refrescos en paquetes de 3. Hoy quería comprar el mismo número de zumos que de refrescos, pero el menor número posible para no llevar mucho peso en el camino a su casa. ¿Cuántos compró de cada tipo?

a) 3 b) 2 c) 6 d) 12

10. Paula quiere hacer un juego de cartas cortando una cartulina de 16 cm de largo y 12 cm de ancho en cuadrados iguales de forma que sean lo más grandes posible y no sobre cartulina. ¿Cuánto medirá el lado de cada carta?

a) 4 cm b) 2 cm c) 8 cm d) 6 cm