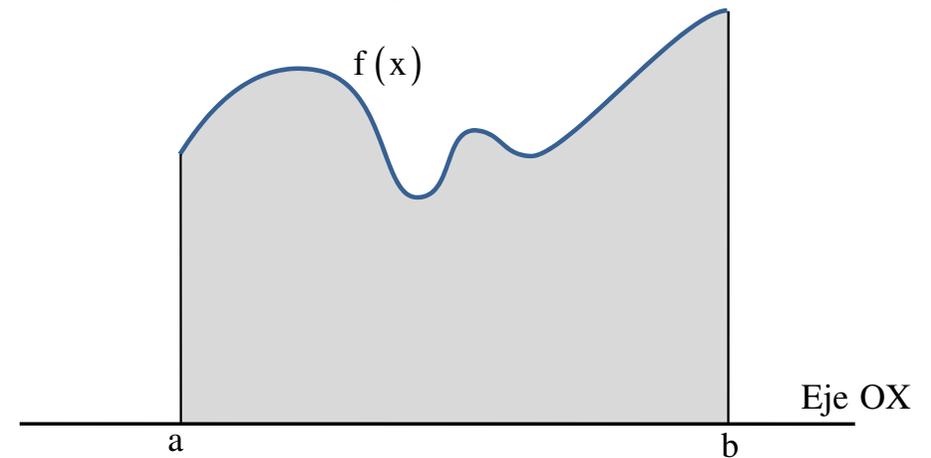


INTEGRALES DEFINIDAS

2º Bachillerato

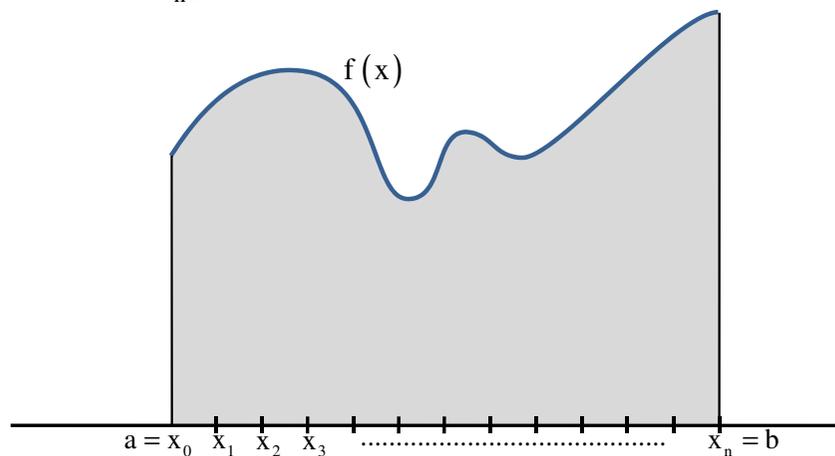
ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Sea la función $y = f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$. Vamos a calcular el área bajo la curva, entre los puntos a y b .



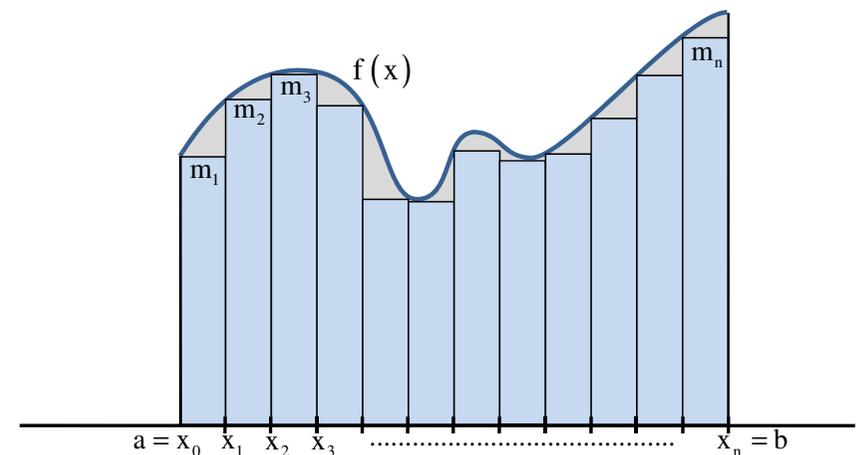
ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Se crea una partición del intervalo $[a, b]$ en n trozos que llamaremos $P_n[a, b]$.



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

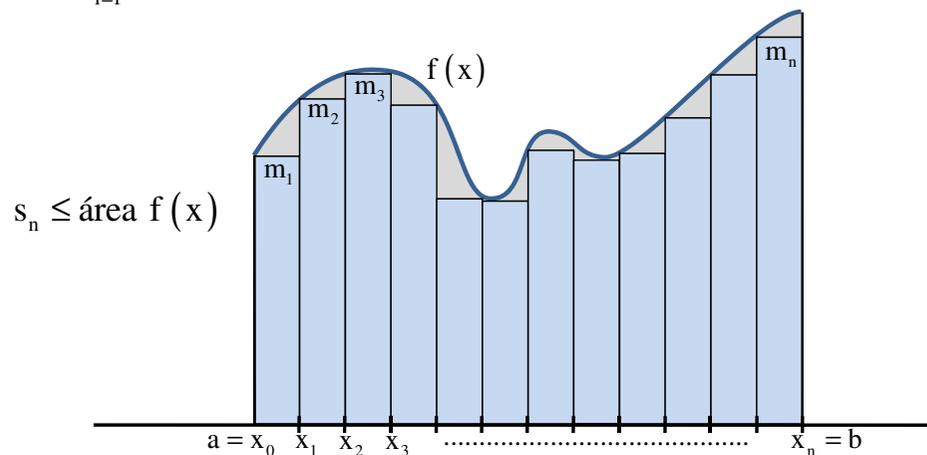
Para la partición $P_n[a, b]$ tomamos los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura m_i que es el menor valor que toma $f(x)$ en cada intervalo.



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

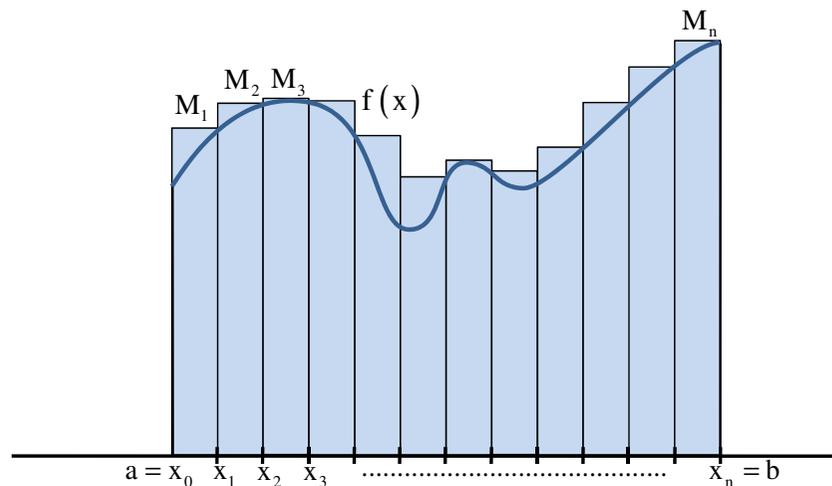
El área azul determinada por los rectángulos se llama **suma inferior**:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = m_1 (x_1 - x_0) + m_2 (x_2 - x_1) + \dots + m_n (x_n - x_{n-1})$$



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

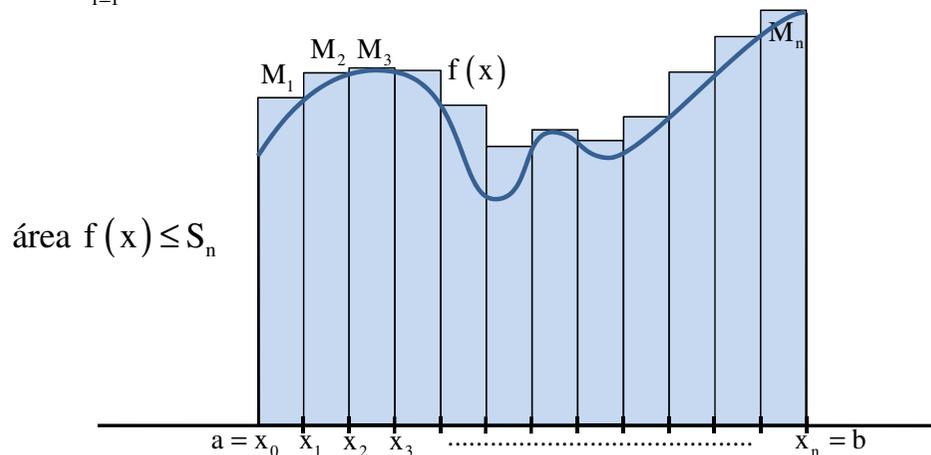
Ahora tomamos los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura M_i que es el mayor valor que toma $f(x)$ en cada intervalo.



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

El área azul determinada por los rectángulos se llama **suma superior**:

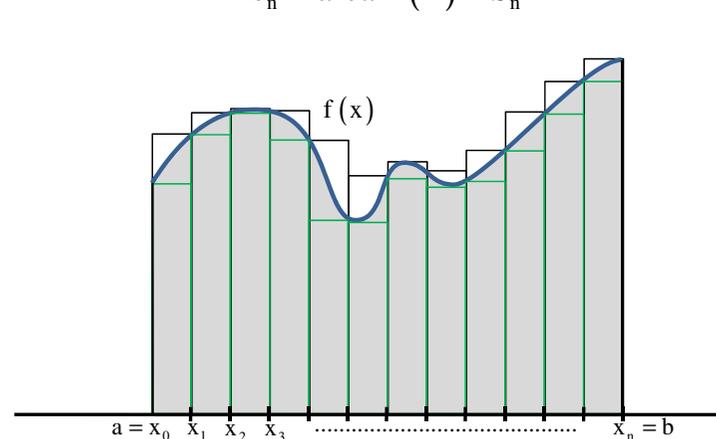
$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + \dots + M_n (x_n - x_{n-1})$$



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

El área bajo la curva $f(x)$ está entre la suma inferior y la suma superior.

$$s_n \leq \text{área } f(x) \leq S_n$$



INTEGRAL DEFINIDA.

Sea la función $y = f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$. Al área entre la curva, el eje OX y el intervalo $[a, b]$ lo llamaremos integral definida de f entre a y b . Se representa como:

$$\int_a^b f \quad \text{ó} \quad \int_a^b f(x) \quad \text{ó} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Por lo tanto podemos decir que:

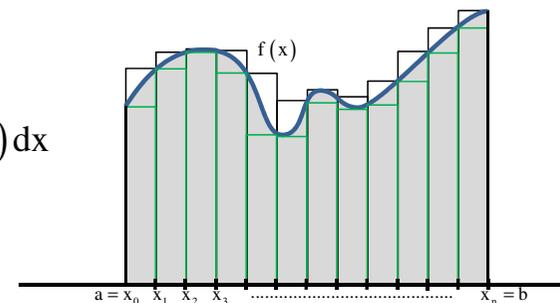
$$s_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n$$

INTEGRAL DEFINIDA.

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \quad S_n = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{Área bajo la curva}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$



PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1) $\int_a^a f(x) dx = 0$

2) Si $f(x) > 0$ y continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx > 0$

3) Si $f(x) < 0$ y continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx < 0$

4) Si $a < b < c$ y f es continua en $[a, c]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

5) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f + g)(x) dx$

6) $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$

7) Si para cada x de $[a, b]$ es $f(x) \leq g(x)$ $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

8) Si f es continua en (a, b) y existen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \beta$ formamos la función:

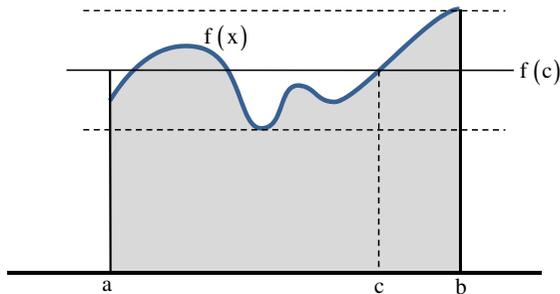
$$f_1(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \beta & \text{si } x = b \end{cases} \quad \text{y definimos } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

9) Teorema del valor medio del cálculo integral.

Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe un número c perteneciente al intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

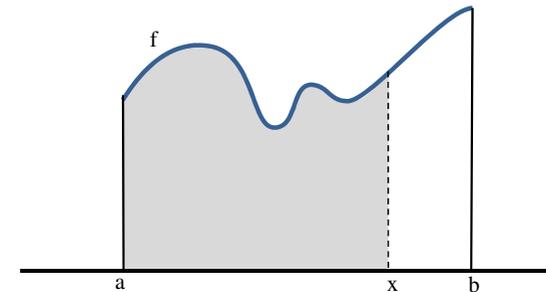


TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Función área.

Si f es continua en $[a, b]$. Consideremos la nueva función:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Teorema.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

es derivable y se verifica que

$$F'(x) = f(x)$$

y por lo tanto

$$\int f(x) dx = F(x) + k$$

REGLA DE BARROW.

Si f es continua en $[a, b]$, y $G(x)$ es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Ejemplos:

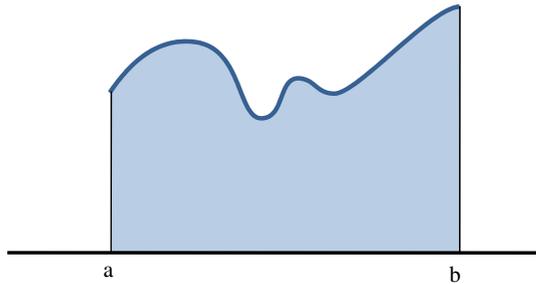
$$\int_1^3 2x dx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\int_0^\pi \text{sen } x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en $[a, b]$, y es positiva, el área es:

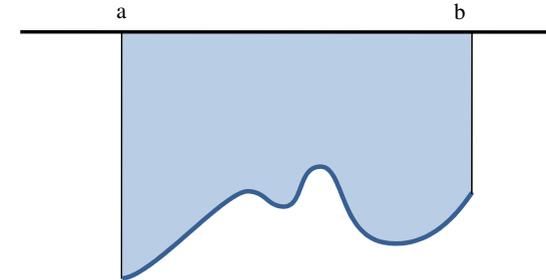
$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$



CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en $[a, b]$, y es negativa, el área es:

$$\text{Área} = -\int_a^b f(x) dx \quad \text{ó} \quad \text{Área} = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

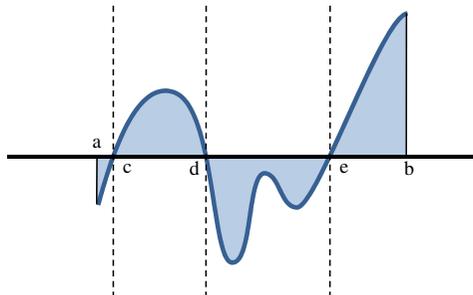


CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en $[a, b]$, y tiene un signo cualquiera el área se calcula:

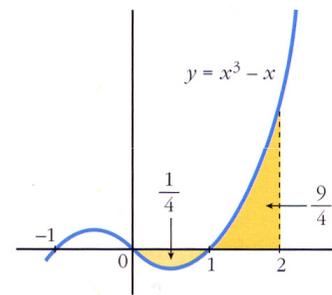
$$\text{Área} = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx$$

$$\text{Área} = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^e f(x) dx \right| + \left| \int_e^b f(x) dx \right|$$



CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Hallar el área comprendida entre la función $y = x^3 - x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



$$x^3 - x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x) dx \right|$$

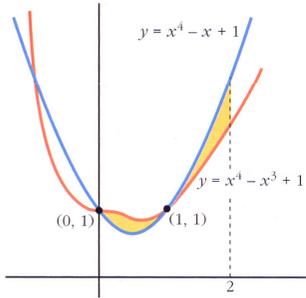
$$\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + k \rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left| -\frac{1}{4} - 0 \right| + \left| 2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right| = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ u}^2$$

CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE DOS CURVAS.

Si f y g son continuas en $[a, b]$, el área entre f y g se calcula como el área delimitada por $f - g$.

Ejemplo: Hallar el área comprendida entre la función $f(x) = x^4 - x + 1$, la función $g(x) = x^4 - x^3 + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



$$(f - g)(x) = (x^4 - x + 1) - (x^4 - x^3 + 1) = x^3 - x$$

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0 \text{ y } x = 1$$

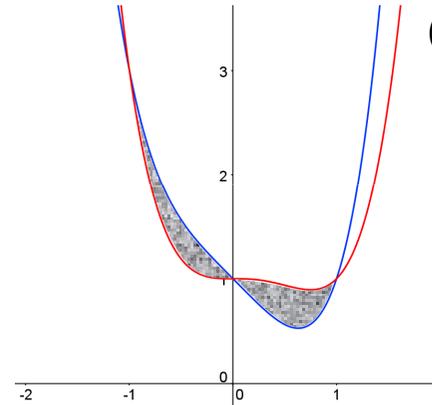
$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x) dx \right|$$

$$\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + k \rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área} = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \right| = \left| -\frac{1}{4} - 0 \right| + \left| 2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right| = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ u}^2$$

CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE DOS CURVAS.

Hallar el área comprendida entre la función $f(x) = x^4 - x + 1$, la función $g(x) = x^4 - x^3 + 1$.



$$(f - g)(x) = (x^4 - x + 1) - (x^4 - x^3 + 1) = x^3 - x$$

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0 \text{ y } x = 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right|$$

$$\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + k \rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área} = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right| + \left| \left(-\frac{1}{4} \right) - 0 \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$